Bouwen aan rekenvaardigheid

Gecijferdheid op de lerarenopleiding

Ronald Keijzer

Goed oefenmateriaal vormt een belangrijke voorwaarde om studenten aan hun gecijferdheid te laten werken. Maar nog veel belangrijker zijn gesprekken over vraagstukken, over oplossingsmanieren, over het inzetten van kennis van de werkelijkheid. Alleen door middel van zulke gesprekken kunnen studenten bouwen aan hun zelfvertrouwen en werken aan een noodzakelijke wiskundige houding.

Werken aan gecijferdheid

Ook de Hogeschool IPABO heeft, net als vele andere opleidingen voor leraar basisschool, een aantal studenten dat moeite heeft met de rekenvaardigheid. Hard werken stelt hen ook na verschillende pogingen niet in staat om de inmiddels gevreesde toets 'gecijferdheid' met een voldoende af te ronden. Het oefenmateriaal is aan flarden gestudeerd, maar het mocht allemaal niet baten. Hulp op maat, met een nieuwe lading oefenmateriaal, lijkt een laatste strohalm om te voorkomen dat ze wegens onkunde op het gebied van rekenen-wiskunde de opleiding moeten verlaten.
Sietske en Louise, twee studenten van de Alkmaarse vestiging van de Hogeschool IPABO, wilden graag het peil van hun gecijferdheid verhogen. Op hetzelfde moment had de sectie wiskunde van hun opleiding mij verzocht om een internetsite met extra oefenmateriaal voor gecijferdheid te ontwikkelen. Ik besloot dat te doen in samenspraak met Sietske en Louise. Zij zouden met de site aan de slag gaan en hun ervaringen met mij delen.

Een eerste diagnose

Om een eerste indruk van de rekenvaardigheid van Sietske en Louise op te doen, bekijk ik hun laatstgemaakte tentamen. Beide studenten blijken met dezelfde problemen te worstelen. Ze raken bijvoorbeeld tijdens het rekenen met grote getallen allebei snel het overzicht kwijt. Verder hebben ze moeite met procenten, breuken en meten. Ik bespreek mijn bevindingen met Sietske en we besluiten om allereerst aan de slag te gaan met procenten. Om haar te laten proeven aan de techniek zet ik de opgaven op het net. Ik vraag haar de opgaven te maken en mij via e-mail op de hoogte te houden van haar vorderingen.

Ik heb bij een opgave vaak even een steuntje in de rug nodig

Aan de slag met procenten

Sietske kreeg om te beginnen een serie 'standaardopgaven'. Afbeelding 1 bevat een voorbeeld hiervan. Sietske moest berekenen hoeveel procent korting er op elk bedrag is gegeven. Tijdens het tentamen bleek ze niet in staat te zijn om deze sommen te maken.
Sietske stuurt me al een dag na onze eerste ontmoeting een bericht over deze opgave: 'De opgave waar moest worden uitgerekend hoeveel korting er is gegeven ging goed, alleen moest ik wel op weg worden geholpen door mijn moeder. Daarna ging het als een trein. Ik heb heel vaak even een steuntje in de rug nodig, iemand die bijvoorbeeld zegt: 'kijk hier eens goed naar', of 'zet die twee getallen eens in een schema'. Het hoeven maar een paar woorden te zijn en dan lukt het me verder zelf wel, maar er helemaal alleen aan beginnen en dan precies zien wat ik moet doen, dat is lastig.'

1

Hoeveel procent korting wordt er gegeven?
a. Van € 40 nu voor € 30
b. Van € 125 nu voor € 100
c. Van € 10 nu voor € 9,75

Enkele standaardsommen over procenten.

Een week later zie ik Sietske voor de tweede keer. We bespreken haar opgaven en enkele handigheidjes die bij het oplossen ervan van pas kunnen komen. Bij Flits-mode en bij Studio X worden broeken verkocht. Bij Flits-mode wordt bij aankoop van twee broeken elk tweede exemplaar verkocht voor de helft van de prijs. Bij Studio X wordt 30 procent korting gegeven over de gehele rekening bij de aanschaf van twee broeken.
Ik neem met Sietske de opgave door. We gaan ervan uit dat een bepaalde broek bij Flits-mode en bij Studio X even duur is. Als je er twee koopt krijg je korting. Sietske begrijpt wat haar te doen staat. Zij moet uitvinden waar je het goedkoopst uit bent. En om dat te bepalen kiest ze een handige prijs voor de broeken, 100 euro, om snel uit te rekenen hoeveel er bij de twee zaken moet worden neergeteld.

We praten verder over procenten en ik merk dat Sietske begint te 'rommelen' als er zowel procenten als kommagetallen in het geding zijn. Verder maakt ze fouten als ze breuken aan procenten wil koppelen. Ze schrijft bijvoorbeeld

$\frac{1}{8}$ = 0,125 % en $\frac{1}{6}$ = 0,16 % en komt verder rekenend met ongepaste afrondingen tot de gelijkwaardigheid van $\frac{5}{6}$ en 80 % (zie afbeelding 2).

2

1. $\frac{1}{5} = 20\%$, $\frac{4}{5} = 80\%$
2. $\frac{1}{8} = 0{,}125\%$ $\frac{5}{8} = 0{,}625\%$
3. $\frac{1}{6} = 0{,}16\%$ $\frac{5}{6} = 80\%$ $\left\{ \begin{array}{l} 5 \times 16 \\ 5 \times 10 = 50 \\ 5 \times 6 = 30 \end{array} \right\} 80$
4. $\frac{1}{3} = 0{,}33\frac{1}{3}\%$

Sietske heeft moeite met de koppeling van breuken en procenten.

De procentenstrook

Een strook biedt inzicht. Als de hele strook 100% is, kun je de percentages bij de breuken vinden door de strook in stukken te verdelen. Sietske weet dat $\frac{1}{4}$ gelijk is aan 25%, en door te halveren ontdekt ze dat $\frac{1}{8}$ = 12,5%. Ze constateert even later dat $\frac{1}{3}$ = $33\frac{1}{3}$ %, maar op zoek naar het percentage dat bij $\frac{1}{6}$ hoort, steken een paar problemen de kop op. Sietske weet niet hoe ze $33\frac{1}{3}$ moet halveren.

Ik help Sietske een beetje op weg, door haar een schatting te laten overwegen: 'De helft van 32 procent, weet je dat misschien wel…?' Sietske bekijkt de strook en realiseert zich dat de helft van $33\frac{1}{3}$ % in de buurt van 16% moet liggen; het is iets meer. Sietske weet ook wat er moet gebeuren om het restje te bepalen: $1\frac{1}{3}$ procent moet worden gehalveerd. Alleen heeft Sietske geen idee hoe ze dat moet aanpakken.

Om Sietske te helpen suggereer ik haar dat $1\frac{1}{3}$ % ook gezien kan worden als $\frac{4}{3}$ procent, maar wanneer dat niet tot actie leidt, besluit ik het probleem van het halveren van $1\frac{1}{3}$ te isoleren. Ik teken $1\frac{1}{3}$ pizza en vraag Sietske te vertellen wat zij en ik krijgen, wanneer we de pizza verdelen. Sietkse wijst de stukken aan en weet die te benoemen als $\frac{2}{3}$. En zo komen we na een moeizame omweg uiteindelijk tot $16\frac{2}{3}$ % als $\frac{1}{6}$ deel.

Een strook en een getallenlijn blijken wonderen te doen

We vervolgens onze strijd met breuken en procenten. Ik vraag Sietske om aan mij te vertellen hoeveel procent er nu hoort bij de breuk $\frac{5}{6}$. Dat vindt ze makkelijk. 'Dan moet je vijf keer $16\frac{2}{3}$ procent doen.' Ze laat dit zien op de getekende strook die nog altijd voor ons ligt en komt zo uiteindelijk uit op $83\frac{1}{3}$ %. Ik wijs nogmaals op de voorliggende getekende strook en laat zien dat $\frac{5}{6}$ 'eentje minder' is dan een hele ($\frac{6}{6}$). Sietske ziet wat ik bedoel en vult aan dat we dus ook $16\frac{2}{3}$ van 100 hadden kunnen aftrekken. Dat gaat vlot en weer komen we uit op $83\frac{1}{3}$ %.

Er volgen nog verschillende besprekingen over procenten, breuken en (later) ook over kommagetallen. Ik merk dat Sietske steeds meer los komt en durft te spelen met voorstellingen voor breuken, procenten en kommagetallen. De ondersteuning van haar gedachten door een strook en later door een getallenlijn maakt haar aanpakken goed bespreekbaar en dat doet wonderen.

Greep op de ruimte om je heen

De gesprekken over rekenen vinden met enige regelmaat plaats, maar hebben nauwelijks een gestructureerd karakter. Als ik een week later weer eens bij haar langsloop om gezamenlijk wat werk te bespreken, blijkt dat Sietske bezig is met enkele opgaven rond het onderwerp meten. Uit haar aantekeningen blijkt dat ze al flink heeft gerekend aan een opgave over de inhoud van een verhuisdoos. (Zie afbeelding 3)

3

lengte = 1 meter, 100 cm
hoogte = 50 cm
breedte = 40 cm
inhoud = lengte × breedte × hoogte,
100 × 50 × 40 = 2000 m^2
2000 m^2 = 20 liter

Aantekeningen van Sietske bij een meetopgave.

Ik reageer op de maten die Sietske heeft gekozen: 'Een verhuisdoos moet je makkelijk kunnen optillen. Ik vraag me af of dat bij de door jou gekozen maten lukt.' Als Sietske denkt dat dat wel in orde is, vraag ik haar de maat van een verhuisdoos op te nemen. De verhuisdoos blijkt veel kleiner dan Sietske had bedacht. Ze vermenigvuldigt de nieuw gevonden maten: 50 cm x 30 cm x 30 cm. Na enig overwegen en wat hulp van mijn kant over de namen van maten, concludeert Sietske dat er 45000 cm^3 in een verhuisdoos gaat. Maar hoe maak

De website met oefenmateriaal bleek een belangrijk hulpmiddel voor de ontwikkeling van gecijferdheid.

Frank Roosendaal.

je daar nou liters van? Ze heeft geen idee. Een blok van het MAB-materiaal is een kubieke decimeter en dat is een liter. Ik kan haar laten zien dat er 1000 kubieke centimeters in een liter gaan. Sietske trekt de juiste conclusie: de 45000 cm^3 van de verhuisdoos betekenen 45 liter. Als ik haar vraag of dat zou kunnen kloppen, komt de realiteit in beeld: 45 melkpakken in een verhuisdoos, dat moet wel zo ongeveer passen.

Meetproblemen aan het strand

Betekenis geven aan maten en die betekenissen gebruiken bij het omzetten van maten blijkt voor Sietske een probleem te zijn. Zij is niet de enige. Haar klasgenoot Louise worstelt hier eveneens mee. Ik bespreek met haar een van de opgaven die ze van het net haalde en waarvan ze mij bij voorbaat liet weten: ‘Als ik zo’n opgaven op het tentamen krijg, dan sla ik hem over.’ Gelukkig laat Louise zich overhalen de opgave samen met mij aan te pakken. Het betreft een probleem over zandsuppletie. Bij zandsuppletie wordt er zand op het strand gepompt om het strand te verhogen. In afbeelding 4 is het gefingeerde krantenartikel uit de opgave afgedrukt.

4

Zandsuppletie

Het strand bij Egmond aan Zee wordt van extra zand voorzien. In zes weken tijd wordt 200.000 m³ zand, afkomstig van een wingebied ongeveer tien kilometer uit de kust, opgespoten.

Een gefingeerd krantenartikel is uitgangspunt van een rekenopgave.

Ik leg Louise de vraag voor: ‘Als men het strand een halve meter wilde verhogen, over ongeveer welke lengte heeft men dat dan kunnen doen?’ Ik wijs naast de tafel hoe hoog een laag van een halve meter ongeveer is. Het blijkt weinig te helpen. Louise kijkt mij vol onbegrip aan en ik besluit met haar de context wat verder te verkennen.

De studenten moeten eerst rustig zelf met de rekenvraagstukken aan de slag gaan. Daarna is een bespreking met de docent zeer waardevol.

Frank Roosendaal.

Alkmaar ligt maar enkele kilometers van de kust en dicht bij Egmond. Ik vraag Louise of zij wel eens op het strand komt en mij bijvoorbeeld kan vertellen hoe breed het strand bij Egmond is. Louise heeft geen idee dus vraag ik haar: ‘Hoe lang doe je er ongeveer over om van de boulevard naar de zee te lopen?’ Eindelijk komen we aan een maat waar Louise min of meer zeker van is. ‘Als je een beetje doorloopt loop je in minder dan drie minuten van de boulevard naar zee.’ Na wat rekenen bepalen we dat het strand bij Egmond ongeveer 200 meter breed is, twee voetbalvelden achter elkaar.

Met referentiematen kun je ook in open problemen zinvolle uitspraken doen

Ik teken voor Louise wat we zojuist bedachten. Het opgespoten zand vormt een blok van 50 centimeter hoog, 200 meter breed en een lengte waarna we op zoek zijn. We worstelen ons door de vermenigvuldigingen die het antwoord in zicht brengen.
0,5 x 200 x lengte moet samen 200.000 opleveren. Uiteindelijk komen we tot zo’n 2 kilometer opgehoogd strand.

Bouwen aan gecijferdheid op de opleiding

Louise gaat zandsuppletie-vragen nog steeds het liefst uit de weg, maar heeft in de voorgaande worsteling wel ervaren dat je, door referentiematen in te zetten, ook in open problemen zinvolle uitspraken kunt doen. Om studenten dergelijke ervaringen te geven, is het niet voldoende om een geordende verzameling opgaven op het net te zetten. Alleen wanneer studenten de kans krijgen om de context samen met de docent te verkennen, kunnen ze werkelijk kennis over rekenen-wiskunde construeren. Alleen dan ontstaat het vertrouwen dat je de getallenwereld de baas kan. De student moet uitgedaagd worden om de getallenkennis te koppelen aan alledaagse ervaringen. Een opgave over zand en strand moet niet binnen de Pabomuren blijven, maar heeft te maken met de werkelijkheid, het strand dat daar enkele kilometers van verwijderd is.

Om de interactie tussen opleider en student van de grond te krijgen is het natuurlijk van belang dat studenten eerst rustig zelf met de rekenvraagstukken aan de slag gaan. Ze moeten eerst zelf aan de problemen kunnen werken zonder de hete adem van de docent in de nek te voelen. Daarvoor kan de ontwikkelde website een belangrijk hulpmiddel zijn. Dat zagen ook Sietske en Louise in. Ze keken kritisch naar de bewegwijzering op de site en gaven aan op welke wijze ze het beste gesteund konden worden bij het leren rekenen. We ontwikkelden bijvoorbeeld een hint die wel zichtbaar kon worden gemaakt op het scherm, maar die niet gemakkelijk kon worden afgedrukt (zie afbeelding 5). 'Even een zetje in de rug om verder te komen,' zo omschreef Sietske dit. Lukt het met dat zetje niet, dan begint de taak van de docent. Als niet duidelijk is hoe de hint tot een oplossing leidt, dan is dankzij die hint vaak wel duidelijk waarnaar je als docent moet vragen in een gesprek over rekenen-wiskunde.

Opbrengst

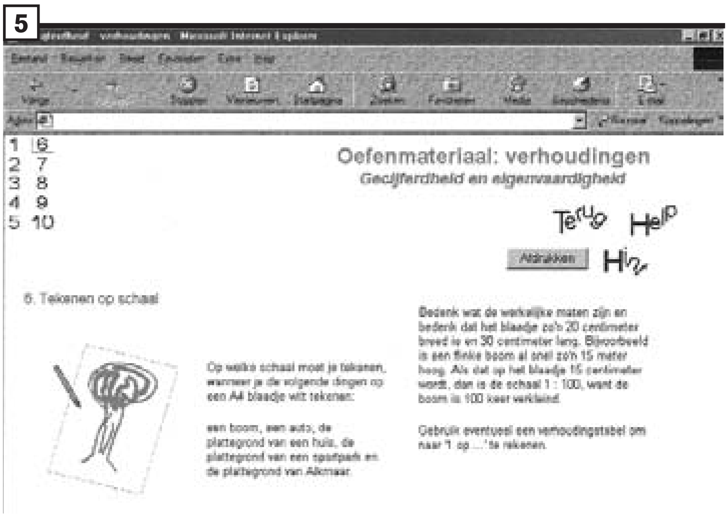
Mijn betrokkenheid met deze twee studenten maakte dat ik met bijzondere belangstelling uitkeek naar hun resultaten op de eerstvolgende rekenvaardigheidstoets. Ik vroeg me af wat ik terug zou zien van onze gesprekken. Gingen de procenten, breuken en kommagetallen beter? Dat zou mooi zijn, maar belangrijker was voor mij de vraag of Louise en Sietske nu ook de wat rijkere problemen durfden aan te pakken. Zouden ze nu gekende referenties passend kunnen inzetten?
Beide studenten zijn flink vooruit gegaan. Sietske haalde de toets, Louise bijna. Alle opgaven werden door de studenten gemaakt en vaak zag ik passende handige strategieën. Ik ging op zoek naar opgaven waar zij durf moesten tonen. Ik vond een beetje durf in een leeftijdenopgave over Bente en Ans. Bente is een miljoen seconden oud. Ans is een miljard seconden oud. De studenten mochten aangeven of Ans de moeder van Bente zou kunnen. Afbeelding 6 laat zien hoe Louise en Sietske aan deze opgave hebben gewerkt. De opgave geeft aanleiding tot schattend rekenen, want waarom zou je precies gaan rekenen? Dat heeft Sietske goed gezien. Schattend rekenen is rekenen met afgeronde getallen en daarom is bij Sietske 356 x 86400 ongeveer 30 miljoen (want 300 keer 100.000) en het doet er daarbij niet toe dat een jaar geen 356 maar 365 dagen telt. Verder is Sietskes conclusie over de leeftijd van Ans iets te snel getrokken, maar ze laat zien dat ze durft. Louise gaat cijferen en laat zo veel minder durf zien. Ze verslikt zich - al rekenend - in een van de vele nullen en gaat zo de mist in.

Reflectie

Het is belangrijk dat aankomende leraren basisonderwijs over een goede gecijferheid beschikken. Ze moeten immers aanpakken van leerlingen kunnen volgen en ze moeten daarvoor op z'n minst zelf de sommetjes uit de methode kunnen maken. Een goede gecijferdheid vormt verder een belangrijke basis voor het verwerven van de didactiek. Het is bijvoorbeeld onmogelijk dat studenten greep krijgen op de didactiek van de breuken, als ze zelf niet in staat zijn breuken betekenis te geven. Maar de belangrijkste reden om studenten aan hun gecijferdheid te laten werken is volgens mij dat ze daardoor een wiskundige houding verwerven. Ze moeten problemen durven aanpakken, actief op zoek gaan naar wiskunde in hun omgeving en - meer algemeen - de wereld willen beschouwen door een wiskundige bril. Het verhaal van Sietske en Louise laat zien dat studenten daarin groeien door overleg met de docent, die de beoogde houding uitstraalt en actief op zoek gaat naar dat waaraan studenten houvast hebben.
Oefenmateriaal op de opleiding kan slechts een beperkte bijdrage leveren aan het vormen van de benodigde wiskundige houding van studenten. Pas in gesprekken met anderen wordt echt aan die wiskundige houding gewerkt, omdat studenten dan gedwongen worden hun aanpakken te onderbouwen en te spiegelen aan die van anderen. Door oefenmateriaal zo te maken dat het vragen oproept, ligt zo'n gesprek in het verschiet. Dan gaat het oefenen, in de zin van repeteren en reproduceren, over in werkelijk construeren van rekenwiskundige kennis. Zo wordt dan een bijdrage geleverd aan goed opleidingsonderwijs.

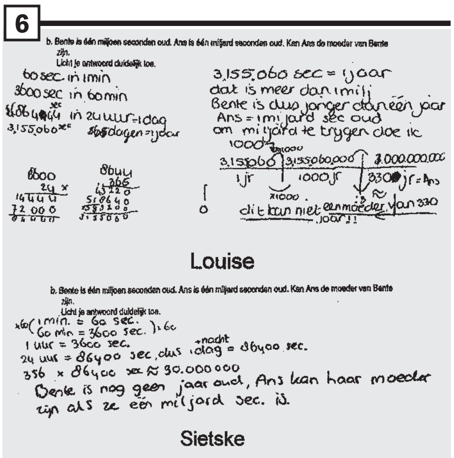
De auteur is werkzaam als docent reken-wiskunde aan de Hogeschool IPABO.

5



Een voorbeeld van een opgave op de site, met een hint.

6



Een tentamenopgave uitgewerkt door Louise en Sietske.