

# Altijd je reken- gereedschap bij de hand

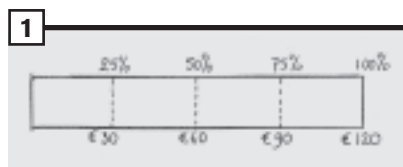
Leerlingen ontwikkelen hun eigen reken-wiskundige modellen

Ivanka van Dijk

**Als leerlingen de werking van een model niet doorzien, kan dat model geen steun bieden in de reken-wiskundeles. Modellen die leerlingen zelf bedenken en in klassengesprekken ontwikkelen worden vaak wel begrepen en kunnen dus hulp bieden bij het oplossen van opgaven. Een interessant onderzoek levert veelbelovende resultaten.**

## Een situatie

Stel je voor ... je zit in groep 7 en je hebt rekenles. Jullie hebben net met de groep gesproken over korting in winkels. Je weet dat korting vaak in procenten wordt aangegeven. De meester heeft een som uit het rekenboek behandeld: 'Op een cd-speler van 120 euro krijg je 25% korting. Hoeveel moet je nu nog betalen?' Je bent zelf net aan het sparen voor een diskman, dus dit voorbeeld spreekt je wel aan. De meester heeft een strook op het bord getekend en daarmee heeft hij de som uitgerekend. (zie afbeelding 1). Nu moet je zelf met de sommen gaan oefenen en er ook een strook bij gebruiken.



25% korting op een cd-speler van €120,-. Hoeveel kost hij nu? De oplossing is in de strook te vinden.

*Je snapt best wat de meester net heeft uitgelegd over korting krijgen en dat je dan minder hoeft te betalen. Maar dat ding, die strook op het bord snap je niet goed! Je weet niet wat je er mee moet. Maar ja, de meester wil nu eenmaal dat je hem gebruikt, dus ga je*

**Een model dat wordt aangereikt schiet vaak zijn doel voorbij**

*aan de slag. Je tekent en gumt, vraagt zachtjes om raad aan andere kinderen en je snapt het nog niet helemaal. Een aanzienlijk deel van je rekentijd gaat verloren aan het bedenken van wat de meester met die strook bedoelt. En als de meester de sommen gaat bespreken met behulp van de strook kun je niet meedoen, want je hebt de uitkomst nog niet gevonden...*

## Inzicht in modellen

Natuurlijk is dit voorbeeld overdreven. Toch zijn er genoeg kinderen die zich niet voldoende kunnen verplaatsen in de contexten en modellen die door

methodeontwikkelaars ontwikkeld zijn. Het ontbreekt deze leerlingen vaak niet aan goede wil. Het ontbreekt hen vaak wel aan inzicht in de manier waarop modellen werken. Daardoor schieten deze modellen hun doel voorbij.

Modellen zijn visuele hulpmiddelen die ingezet kunnen worden bij het leren rekenen. De realistische reken-wiskundemethodes staan er vol mee. Denk maar aan de lege getallenlijn voor het leren rekenen tot 100, het busmodel bij het leren rekenen tot 10, of de pizza voor de breuken. Het zijn modellen die iedere leerkracht wel kent. Voor het aanleren van het opereren met procenten wordt momenteel het strookmodel als voornaamste model ingezet. Maar wat te doen als een kind de oplossing met behulp van een strookmodel niet ziet en niet de link weet te leggen tussen de abstracte strook en de som? Voor deze kinderen is een extra stap nodig voordat het strookmodel ingezet kan worden. Eerst moet het besef ontwikkeld worden hoe zo'n model in elkaar steekt. Zou het niet mooi zijn als een kind de kans zou krijgen om zelf een model te bedenken? Een model dat wèl begrepen wordt en dat dus wèl helpt bij het oplossen van procentssommen en waarbij door het ontwikkelproces tevens meer inzicht ontstaat in de werking en het gebruik van modellen?

## Maak je eigen model

Als kinderen de gelegenheid krijgen om eerst eigen modellen te bedenken, voorafgaand aan het werken met door methode-ontwikkelaars ontwikkelde modellen, heeft dat een aantal voordelen. Kinderen ontwikkelen een oplossing op hun eigen niveau. Zij sluiten op die manier aan bij de voorkennis die ze al bezitten. Doordat er eigen inbreng van hen verwacht wordt, worden kinderen op hun verantwoordelijkheid aangesproken. De actieve betrokkenheid zorgt voor een grotere leeropbrengst.

Het zelf-ontwikkelde model wordt vervolgens aangescherpt. In een discussie in de klas worden diverse ontworpen

modellen nader bekeken op bruikbaarheid, effectiviteit, eenvoud en andere zaken waar een goed model aan zou moeten voldoen. Met de hulp van klasgenoten en de leerkracht, scherpt de leerling zijn besef van het model verder aan. Misschien besluit hij wel zijn model te vervangen door een model dat een medeleerling bedacht heeft en gaat hij daarmee experimenteren. Langzamerhand ontstaat door de gezamenlijke inspanning van de leerlingen en de leerkracht een goed en nuttig model.

Het hierboven geschetste model-ontwikkelproces is de moeite van het uitproberen waard. Leerlingen leren hoe ze zelf modellen kunnen ontwikkelen, maar ook hoe bestaande modellen kunnen worden aangepast. Deze leerlingen kunnen flexibel met modellen omgaan. Zij hebben bovendien altijd hun eigen gereedschap (modellen) bij de hand.

#### Een didactisch onderzoek

Deze manier van werken is de afgelopen jaren in de praktijk beproefd. In het onderzoek 'De leerling als ontwerper van modellen in reken-wiskundeonderwijs op de basisschool' van de afdeling Onderwijspedagogiek aan de Vrije Universiteit van Amsterdam zijn twee manieren van werken met modellen vergeleken. In de ene manier reikte de leerkracht modellen aan waar de leerling vervolgens mee moest werken. In de andere manier ontwierp en ontwikkelde de leerling zijn eigen modellen in samenwerking met medeleerlingen en de leerkracht. Er is onderzocht of het zelf leren ontwerpen van modellen, zoals hierboven uitgewerkt, inderdaad een betere strategie is dan het aanreiken van modellen. In tien groepen 7 is door de eigen leerkracht een lessenserie over procenten gegeven. Vijf groepen werkten op de aanreikende manier, de andere groepen werkten op de ontwerpende manier.

Uit het onderzoek bleek dat de leerlingen in de ontwerpende groep significant hoger scoorden op de toetsen die na afloop van de lessenserie werden



Jasper Oostlander

Hoeveel procent energie zit er nog in de batterij? Op den duur ontdekken leerlingen dat in een goed model allerlei onbelangrijke details weggelaten mogen worden.

afgenomen dan de leerlingen uit de aanreikende groep. Tevens werden voorbeelden gevonden van de overgang van concrete modellen naar meer abstracte modellen, wat aantoonde dat kinderen hun zelfbedachte

terij, maar Tess heeft daar nog even geen aandacht voor. Ze leest namelijk alles wat op de batterij staat hardop voor, in alle mogelijke talen. Pas als zij de twee witte knopjes gelijktijdig indruk, ziet ze dat het indicatiebalkje bijna helemaal geel wordt. Lisa wijst haar op de mogelijke betekenis van dat balkje. Daarna concluderen ze gezamenlijk dat de batterij nog voor bijna 100% vol zit. Ze tekenen een model van de batterij in hun werkschrift (zie afbeelding 2).

## Wie zelf modellen maakt ontwikkelt inzicht en wordt flexibel

modellen kunnen generaliseren en toepassen in nieuwe situaties. Om dit te illustreren volgen nu enkele voorbeelden van zelf-ontworpen modellen en de ontwikkeling die deze modellen in enkele lessen hebben ondergaan.

#### Een concreet model

Lisa en Tess zijn twee meisjes uit groep 7 van een Amsterdamse basisschool. Op een gegeven moment werken zij samen aan een serie opgaven over batterijen. Ze hebben een powercheckbatterij voor zich en proberen uit te vinden hoeveel energie er nog in zit. Lisa ziet direct het '100%'-teken op de bat-

2



Het model van de powercheckbatterij getekend door Lisa en Tess.

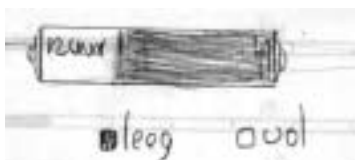
Als de opgave wordt nabesproken met de hele groep komen er diverse modellen naar voren. De leerkracht heeft tijdens het werken van de kinderen gekoken welke soorten modellen ontwikkeld werden. Hij geeft vervolgens enkele kinderen de opdracht hun model op het bord te tekenen voor de nabespreking. Er staan heel concrete modellen van de batterij op het bord, zoals die van Tess en Lisa, maar sommige kinderen hebben voor andere

wijzen van representeren gekozen. De modellen worden met elkaar vergeleken op bijvoorbeeld handigheid en bruikbaarheid. Zo komen Lisa en Tess tot de conclusie dat hun model met alle kleuren en details wel erg gedetailleerd is en dat het veel tijd kost om dat te tekenen. Zo duurt het wel erg lang voordat ze met hun model kunnen gaan rekenen.

### De ontwikkeling van eigen modellen

In de volgende opgave is de batterij van ene Marije getekend. Er zit nog voor 60% energie in. De bijbehorende vraag luidt: 'Als een volle batterij in een walkman 12 uur werkt, hoeveel uren kan Marije dan nog naar haar walkman luisteren?' Tess en Lisa praten over de opgave, en proberen hem voor zichzelf duidelijk te krijgen. Zo komt al pratend naar voren dat 50% de helft is en dat Marije in dit geval nog 6 uur plezier heeft van haar walkman. 'Maar', constateren de meisjes, 'Marijes batterij is nog voor 60% vol.' 'Misschien kan ze dus nog wel 6 uur én een kwartier luisteren', oppert Lisa. Tess schat het op 7 uur. Ze tekent een batterij in haar werkboek om aan Lisa te laten zien wat ze bedoelt.

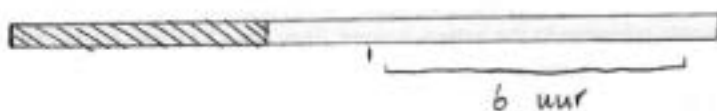
3



Met een volle batterij kun je 12 uur doen. Hoeveel uren kun je doen met een batterij die nog maar voor 60% gevuld is? Een model van Tess.

Lisa is het wel met Tess' schatting eens, maar wil het graag nog wat preciezer zien. Bovendien merkt ze op dat Tess de verdeling 'leeg en vol' per ongeluk heeft omgedraaid. Lisa tekent een eenvoudige, dunne reep (zie afbeelding 4).

4



Zo tekent Lisa een batterij die voor 60% gevuld is.

Op de helft van de reep trekt ze een lijntje om aan te geven dat het 50% is. Eronder schrijft ze: 6 uur. Dan schat ze er nog 10% bij en ze arceert de 40% die overblijft. Lisa meet de reep die ze heeft getekend. Hij is ongeveer 11 cm, en de reep moet 12 uur representeren. Dat is lastig. Ze besluiten het dan maar 'ongeveer' te berekenen: 1 cm is ongeveer 1 uur. Ook in deze tekening heeft Marije nog ongeveer 7 uur om naar haar walkman te luisteren. Deze opgave wordt weer klassikaal nabesproken en weer verschijnen er diverse modellen op het bord. De leerlingen stellen elkaar vragen over hun keuze voor een bepaalde representatie en leren zo van elkaar. Eén van de nuttig bevonden modellen wordt gebruikt om daadwerkelijk de opgave op te lossen. Dan blijkt dat het handig is om in je model

## Als de klas eraan toe is, kunt u wel een formeel model introduceren

nauwkeurig te noteren wanneer het om uren en wanneer het om procenten gaat. De leerlingen ontdekken dat het zelfs allebei tegelijk kan, zoals op een dubbele getallenlijn. Als de kinderen een aantal keren zelf modellen hebben bedacht en uitgewerkt, is er niets op tegen om ook eens een formeel model te introduceren dat erg op één van de modellen van de groep lijkt. De overstap naar een formeel model als een strookmodel is een stuk

kleiner wanneer de kinderen al ervaringen hebben opgedaan met zelfbedachte soortgelijke modellen.

### De resultaten

Na dit kijkje in de klas keren we terug naar de eerder beschreven resultaten van dit onderzoek. De conclusie is als volgt: de resultaten laten duidelijk positieve effecten van de experimentele, ontwerpende conditie zien. Het leren modelleren kan leiden tot een dieper inzicht in de betekenis en het gebruik van modellen in reken-wiskundeonderwijs.

Wat betekent dit onderzoek voor het reken-wiskundeonderwijs? Het blijkt zinvol te zijn om leerlingen te stimuleren hun eigen modellen te ontwikkelen en te bediscussiëren. Het blijkt tevens zinvol te zijn om leerlingen te confronteren met modellen van medeleerlingen en met bestaande, formele modellen. Vanuit hun eigen actieve inbreng ontstaat een beter inzicht in de wijze waarop het formele model tot stand is gekomen, en bovendien leren kinderen hoe ze in nieuwe wiskundige situaties zelf modellen kunnen bedenken of zonedig aanpassen. Dat geeft je als kind een veilig gevoel: Je hebt je gereedschapskoffer altijd bij de hand!

*De auteur is op 16 oktober 2002 gepromoveerd op het proefschrift over dit onderzoek.*

U kunt het boek bestellen door overmaking van €17 (inclusief verzendkosten) op giro 5050504, t.n.v. IMAW van Dijk te Mijdrecht. Vermeld a.u.b. duidelijk uw adresgegevens. Het proefschrift wordt u dan zo spoedig mogelijk toegezonden.

Literatuur:  
*Dijk, Ivanka van (2002), The learner as designer: Processes and effects of an experimental programme in modeling in primary mathematics education.*